CICLO LECTIVO
2017

Asignatura: MATEMATICA

Curso de Ingreso Intensivo

IUPFA

Instituto Universitario de la Policía Federal Argentina

Instituto Universitario de la Policía Federal Argentina

Curso de Ingreso Intensivo

Asignatura: MATEMATICA

Ciclo Lectivo 2017

Fundamentación:

Objetivo general de la materia:

Que el/la estudiante domine la aritmética y el algebra básica a los efectos que no encuentre dificultades en los cursos de Física, Algebra, Análisis y otros que usen estos lenguajes en su cursada, durante los primeros años de la carrera.

Objetivos específicos de la materia:

Unidad Temática Nº1: Que el/la estudiante conozca las propiedades básicas de los números reales y las operaciones entre ellos.

Unidad Temática Nº2: Que el/la estudiante domine el cálculo literal como método para expresar proposiciones algebraicas con toda generalidad.

Unidad Temática Nº3: Que el/la estudiante logre habilidad en el uso del concepto fundamental de conjuntos y funciones entre ellos.

Unidad Temática Nº4: Que el/la estudiante aplique el concepto de función en un caso especial de uso muy común.

Contenidos:

Unidad Temática Nº1: El número real.

Unidad Temática Nº2: Operaciones algebraicas básicas.

Unidad Temática Nº3: Conjuntos de números reales y funciones entre ellos.

Unidad Temática Nº4: Funciones lineales.

Metodología de trabajo:

Dictado de clases teóricas, con énfasis en los puntos básicos de la aritmética y el algebra elemental.

Clases prácticas con abundante ejercitación y seguimiento por parte del docente de las habilidades adquiridas por los alumnos.

Evaluación apropiada que permita conocer el progreso obtenido en el dictado de este programa.

Cronograma:

Encuentro	Fecha	Nombre Unidad Temática	Bibliografía/otros
1		El número real	Cuadernillo
2		Operaciones algebraicas básicas	Cuadernillo
3		Conjuntos de números reales y funciones entre ellos	Cuadernillo
4		Funciones lineales	Cuadernillo
Examen	01/03		

Evaluación:

-Asistencia obligatoria: Porcentaje mínimo de asistencia: 80 %

-Un examen final obligatorio en forma individual y escrita.

MATEMÁTICA

El número real

Claro está, el concepto más importante en matemáticas es el de número. Trabajaremos con los así denominados "reales"; estos comprenden los siguientes "conjuntos numéricos":

- Los números naturales: los que usamos para contar: 1,2,3…
- Los números enteros: Los anteriores más el cero, más los inversos aditivos de los anteriores, o sea los naturales precedidos por el signo "-": …-3,-2,-1,0,1,2,3…
- Los números racionales: todos los números de la forma: p/q, donde p y q son enteros y q es distinto de cero.
- Los números irracionales: todos aquellos reales que no pertenecen a los conjuntos numéricos anteriores. Ellos permiten expresar cantidades tales como $\sqrt{2}$ ó π, que es la relación entre el diámetro y la circunferencia.

Conocemos las operaciones elementales desde la escuela primaria: la suma, la diferencia, el producto y el cociente. A todo par de números reales puede aplicarse estas operaciones –con la exclusión de la división por cero-. Es muy importante tener en cuenta las siguientes observaciones:

- Las operaciones tienen una jerarquía de prioridades. En una expresión que contenga varias operaciones, los productos y cocientes deben realizarse en primer lugar, las sumas y restas después. Así la expresión:

  3 + 4x6 + 5x2

  vale: 3 + 24 + 10 = 37
- Regla de los signos: multiplicar números de igual signo producen un número positivo, y con signos distintos, negativos.

  2x3=6

  2x(-3)=-6

  (-2)x3=-6

  (-2)x(-3)=6
- Usamos paréntesis para alterar la prioridad de las operaciones. Por ejemplo:

  3 - (4x5 - 7) + 6 = -4 (verificar)

  Los paréntesis deben resolverse en primer lugar. También pueden estar "anidados", por ejemplo:

  3 + ((2 + 5x4) - 2) = 23

Expresión decimal

Las cifras a la derecha de la coma decimal expresan las fracciones de unidad:

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{10}{80} = 0,125$$

Los llamados números periódicos contienen infinitas cifras decimales, que se repiten en secuencia:

$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$$

$\frac{5}{14} = 0,3\,571428\,571428\,571428\ldots$ (obtenemos esta expresión dividiendo el numerador por el denominador)

Los números irracionales tienen en su expresión decimal infinitas cifras sin ningún patrón de regularidad:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950\ldots$

En cualquier cálculo que intervenga un numero con infinitas cifras decimales, debemos, claro está, tomar solo algunas. Las calculadoras de bolsillo generalmente usan 8 o 10, en los problemas de Física de cátedra, 3 o 4 suelen ser suficientes. Aquella parte de las Ciencias Físicas denominada "Teoría de la medida" nos enseña a usar la cantidad óptima).

Observación: en los números reales existe el concepto de orden. Usamos el símbolo "<" para indicar precedencia con respecto a este orden. Por ejemplo, es válida la expresión siguiente:

$-3 < 4{,}5$

El orden inverso se denota con el símbolo ">".

Cálculo literal

Para expresar cantidades en forma general o que desconocemos, usamos letras u otros signos:

a,b,c… A,B,C… α,β,γ… x,y,z…

Una expresión que contenga estos literales lucirá, por ejemplo, así:

$3ab + 2ac - 5abc$

A cada expresión separada por un signo + o – lo denominamos "término".

Dos letras contiguas indican que las respectivas cantidades se multiplican, o sea se suprime el signo de multiplicación: el punto.

Si hay divisiones presentes, podemos usar la barra horizontal:

$$\frac{3x-2y}{4x+2y}$$

O también:

$$(3x-2y)/(4x+2y)$$

Observar: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Notar también que: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a.d}{b.c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

Con el cálculo literal a mano, podemos enunciar las reglas **básicas de la aritmética.**

Exponenciación y radicación

- Exponenciación: es la operación que consiste en multiplicar un número por sí mismo varias veces.

$$a^1=a$$

$$a^2=a.a$$

$$a^3=a.a.a$$

$a^n = a.a.a....a$ (multiplicamos a por sí misma n veces)

También por definición: $a^0=1$ (con $a\neq 0$)

Exponente negativo: en este caso interpretamos a la potencia negativa como:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Radicación: diremos que el número r es la raíz enésima del número a, y escribimos: $\sqrt[n]{a}=r$, si *r* elevado a la potencia *n* es igual a *a*. Al número *n* lo denominamos "índice de la raíz".

También escribiremos: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Se verifica también que: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Propiedades

Por definición de exponenciación valen las siguientes desigualdades:

$$a^x.a^y=a^{x+y}$$

$$(a^x)^y=a^{x.y}$$

Observaciones:

- Sólo los números positivos y el cero tienen raíces de índice par; por ejemplo, no existe ningún número real que sea igual a $\sqrt{-1}$.
- De las reglas dadas hasta ahora se deduce que:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[p]{a^q}$$

  Vale la igualdad: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

- Cuando escribimos una expresión literal que contiene potencias, sumamos los términos de iguales letras elevadas a iguales potencias. Por ejemplo:

$$4a^3\,b^3+3a^3\,b^3-2a^2\,b^2=7a^3\,b^3-2a^2\,b^2$$

Propiedad distributiva y supresión de paréntesis

Por las propiedades de los números reales, es válida la siguiente ecuación:

$a.(b+c)= a.b+a.c$

Hemos logrado así, suprimir un paréntesis, en particular:

$(a+b)=1.(a+b) = a+b$

$-(a+b)= (-1)(a+b) = -a-b$

En palabras, para suprimir un paréntesis precedido por un signo – cambiamos los signos de todos los términos que contiene dicho paréntesis; precedido por un signo + no requiere ningún cuidado especial.

Ejemplo:

$-(4a-2b+3ac) = -4\,a+2b-3ac$

Algunos casos especiales se presentan con mucha frecuencia.

Ejemplo:

("Cuadrado de un binomio")

$(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a2+2ab+b^2$

("Diferencia de cuadrados")

$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$

Observar: $(a+b):c= \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Factorización

Muchas veces el procedimiento inverso al anterior es útil. Lo denominamos "factorización" (la palabra "factoreo" cayó en desuso).

El caso más simple es el de "Factor común":

- Si en una serie de términos un mismo literal o varios aparecen en todos ellos, los escribimos fuera de un paréntesis con la mayor potencia que divide a todos los miembros y con el factor común de la parte numérica. Ejemplo:

$$4a^2 b^2 c+2a^2 bc=2a^2 b(2b+c)$$

A menudo, podemos realizar la operación de factorización en varios pasos ("factor común en grupos"), por ejemplo:

$$4a + 4b + xa + xb =4.(a + b) + x.(a + b) =(a + b).(4 + x)$$

Otro ejemplo:

$$4a - 4b + xa - xb = 4.(a - b) + x.(a - b) = (a - b).(4 + x)$$

Preste atención al ejemplo siguiente:

$$4a - 4b + xb - xa = 4.(a - b) + x.(b - a)$$
$$=4.(a - b) - x.(-b + a) = 4.(a - b) - x.(a - b) = (a - b).(4 - x)$$

Otro caso frecuente es el "Trinomio cuadrado perfecto".

Por ejemplo:

$$x^2 + 2x + 1 = \mathbf{(x + 1)^2}$$
$$x^2 + 6x + 9 = \mathbf{(x + 3)^2}$$

Mas difícil:

$$x^2 + 8/3\,x + 16/9 = \mathbf{(x + 4/3)^2}$$

En general:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

Más ejemplos:

$$x^6+10x^3+25 = \mathbf{(x^3+5)^2}$$

$$0{,}09a^6+1-0{,}6a^3 = \mathbf{(0{,}3a^3-1)^2}$$

Similar al anterior es el procedimiento de factorización por "Trinomio cubo perfecto"

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)3$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3$$

En general:

$$x^3 + 3bx^2 + 3b^2x + b^3 = \mathbf{(x+b)^3}$$

El siguiente caso se suele denominar "Diferencia de cuadrados"

$$x^2-a^2=(x-a).(x+a)$$

Algunos ejemplos de aplicación de este caso:

$$a^2\,b^2-z^2=(ab-z)(ab+z)$$

$$a^2-9=(a-3)(a+3)$$

Ejercicio 1

El alumno deberá poner especial cuidado en la realización de los ejercicios, los cuales están formulados en grado de dificultad creciente, a los efectos de alcanzar cierto dominio de la materia.

1. Ordenar en forma creciente la siguiente secuencia de números:

   $-1;\ 2{,}5\ ;-3.2\ ;3\ ;\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};-\frac{2}{3};\sqrt{3}\ ;10\ ;-8$

2. Escribir en formato digital los siguientes números, con cuatro cifras decimales exactas (usar calculadora cuando sea necesario):

   $\frac{1}{2};-\frac{2}{3};\sqrt{2}\ ;\sqrt[3]{2}\ ;-\frac{1}{6}$

3. Calcular:

   a) $2 + 3-5.4 - 2.3 + 3.(-5)$

   b) $2 + ((3 - 2{,}5) - (-3))$

   c) $4{,}5.(6 - (2 + \frac{1}{2}))$

   d) $\frac{1}{5}.(-2 + 3{,}5 - (4 - 2{,}5))$

4. Calcular:

   a) $\dfrac{2-(3{,}5-\frac{1}{2})}{2.(7-(-3))}$

   b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{10} - 3{,}5$

   c) $\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{-2} +1$

Ejercicio 2

1 Calcular:

a) $2^2.2^3.2^5.2^{-1}.2^{-3}.2^0$

b) $(2+3)^2.2^2+3^2.2^{2+3}$

c) $2^{1/2}.2^{-1/2}.2^{3/2}$. ($\sqrt{2}=1,4142\ldots$)

d) $(2^2)^3.(2^4)^{1/2}.((2^2)^2)^{-1}$

2 Usando calculadora, evaluar de dos maneras distintas:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}$

b) $\sqrt[5]{\sqrt{59049}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{531441}}}$

Ecuaciones

Dos expresiones literales vinculadas por un signo "=" forman una ecuación.

Ejemplo: $2ab - 3ac = 2(a + c)$

Si queremos llevar un término hacia otro lado de la igualdad debemos cambiarlo de signo:

$2ab=2(a + c) + 3ac$

Un número o literal que multiplica a TODA la expresión a un lado de la igualdad pasa al otro lado de la misma dividiendo a TODA la expresión del otro lado:

$ab=\dfrac{2(a+c)+3ac}{2}$ o también: $2a=\dfrac{2(a+c)+3ac}{b}$

Un número o literal que divida a TODA la expresión a un lado de la igualdad pasa al otro lado de la misma multiplicando a TODA la expresión del otro lado:

$\dfrac{2a+bc}{3b} = c-2a => 2a+bc=3b.(c-2a)$

(Olvidar estos paréntesis es un error tan frecuente como evitable.)

Un ejemplo importante de aplicación es la resolución de la "ecuación de primer grado con una incógnita".

Sea entonces una cantidad desconocida que la representamos con el literal "x", pero que sabemos obedece a la ecuación:

$ax+b=0$; entonces: $ax=-b$; y por último $x=-\dfrac{b}{a}$

La "ecuación de segundo grado con una incógnita" es:

$ax^2+bx+c=0$

Esta ecuación posee dos, una o ninguna soluciones dadas por la fórmula:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si la cantidad bajo el signo radical es positiva, las soluciones son distintas, si es nula, ellas coinciden y en el caso de ser negativa la ecuación no tiene soluciones en el conjunto de los números reales.

Ejercicio 3

Resolver:

1) $3x-2 = -1$

2) $x - 3,5 = 2,7$

3) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{2}=-\frac{2}{7}$

4) $x^2-5x+6=0$

5) $x^2-2x+1=0$

6) $x^2+1=0$

Logaritmos

Llamaremos logaritmo en base b del número positivo "a" y lo denotaremos $log_b\, a$ a aquel valor r al que hay que exponenciar b para que nos devuelva el valor a, en símbolos:

$log_b\, a=r \quad <=> \quad b^r=a$

En la práctica, b toma los valores 10, 2 o el numero e= 2,7182818….

Ejemplos:

$$log_3\, 9=2$$
$$log_2\, 32=5$$
$$log100=log_{10}\, 100=2$$
$$ln1=log_e\, 1=0$$

Propiedades de los logaritmos

Se cumplen las siguientes igualdades:

$log_b(x.y)=log_b\, x+log_b y$

$log_b\, (x:y)=log_b x-log_b y$

$log_b x^n=n.log_b x$

De donde se deduce: $log_b \sqrt[4]{x}= log_b x^{1/2}=\frac{1}{n}\, log_b\, x$

Ejercicio 4

Sin usar calculadora, evaluar:

1) $log_5 45-log_5 9$

2) $log_{\square} 2+log_{\square}\, 5$

3) $2.log_3 9$

Ejercitación adicional

Factorización de un polinomio; en los ejercicios siguientes, complete la igualdad factorizando cada expresión.

Caso 1: factor común

1) $5.\,x^3-20.x^2+15.x=$
2) $12.x^4-8.x^2-4=$
3) $18.x^3+12.x^2-9.x=$
4) $-7.x^5+21.x^4-14.x2=$
5) $-5.x^3-3.x^2-7.x=$
6) $\frac{9}{4}.x^3-\frac{6}{5}.\,x^2+3.x=$
7) $\frac{2}{3}.x^4+\frac{1}{6}.\,x^3-\frac{7}{12}.x^2=$
8) $-\frac{3}{5}.x^5+\frac{27}{10}.\,x^3-\frac{9}{25}.x=$
9) $\frac{6}{5}.x^6-\frac{2}{15}.\,x^5+\frac{5}{25}.x^3=$
10) $\frac{7}{5}.x^4-\frac{21}{4}.\,x^3+\frac{35}{2}.x=$

Caso 2: factor común por grupos

1) $x^3-5.x^2+3.x-15=$
2) $2.x^3-4.x^2+3.x-6=$
3) $x^3-2.x^2+x-2=$
4) $x^6+x^4-2.x^2-2=$
5) $x^5+2.x^2-5.x^3-10=$
6) $35.x^3-7.x^2-5.x+1=$
7) $3.x^6-6.x^4-4.x^2+8=$
8) $3.x^6-6.x^4-4.x^2+8=$
9) $6.x^5+2.x^4-3.x^3-x^2+12.x+4=$

Caso 3: trinomio cuadrado perfecto

1) $x^2+6.x+9=$

2) $x^2-6.x+9=$

3) $x^2-2.x+1=$

4) $x^2-10.x+25=$

5) $x^2+8.x+16=$

6) $4.x^2-12.x+9=$

7) $9.x^2-24.x+16=$

8) $x^2+5.x+\frac{25}{4}=$

9) $x^4+16.x^2+64=$

10) $x^6-6.x^3+9=$

11) $x^6-6.x^3+9=$

12) $x^{10}-2.x^5+1=$

Caso 4: cuatrinomio cubo perfecto

1) $x^3+6.x^2+12.x+8=$

2) $x^3 - 6.x^2+12.x-8=$

3) $-x^3+6.x^2-12.x-8=$

4) $-x^3+6.x^2-12.x-8=$

5) x3-9.x2+27.x-27=

6) $-x^3+9.x^2-27.x+27=$

7) $x^3-3.x^2+3.x-1=$

8) $-27.x^3+27.x^2-9.x+1=$

9) $-8.x^3-24.x^2-24.x-8=$

10) $x^3-15.x^2+75.x-125=$

11) $-27.x^3+54.x^2-36.x+8=$

Caso 5: diferencia de cuadrados

1) $x^2-25=$

2) $16-x^2=$

3) $4.x^2-9=$

4) $64.x^2-1=$

5) $\frac{1}{4}.x^2-\frac{1}{9}=$

6) $\frac{9}{25}.x^2-\frac{1}{36}=$

7) $x^6-81=$

8) $x^4-36=$

9) $-4+25.x^2=$

Representación en coordenadas cartesianas

Ejes cartesianos

El sistema de ejes cartesianos fue creados por el filósofo francés René Descartes, quien había latinizado su apellido como Cartesio, por eso llevan ese nombre.

Los ejes cartesianos son dos rectas perpendiculares sobre cada una de las cuales se marca una escala.

La recta horizontal se llama eje "x" o eje de las abscisas.

La recta vertical se llama eje "y" o eje de las ordenadas.

Estas dividen al plano en cuatro cuadrantes, el primero es el que tiene ordenada y abscisa positiva y los demás se cuentan en orden antihorario.

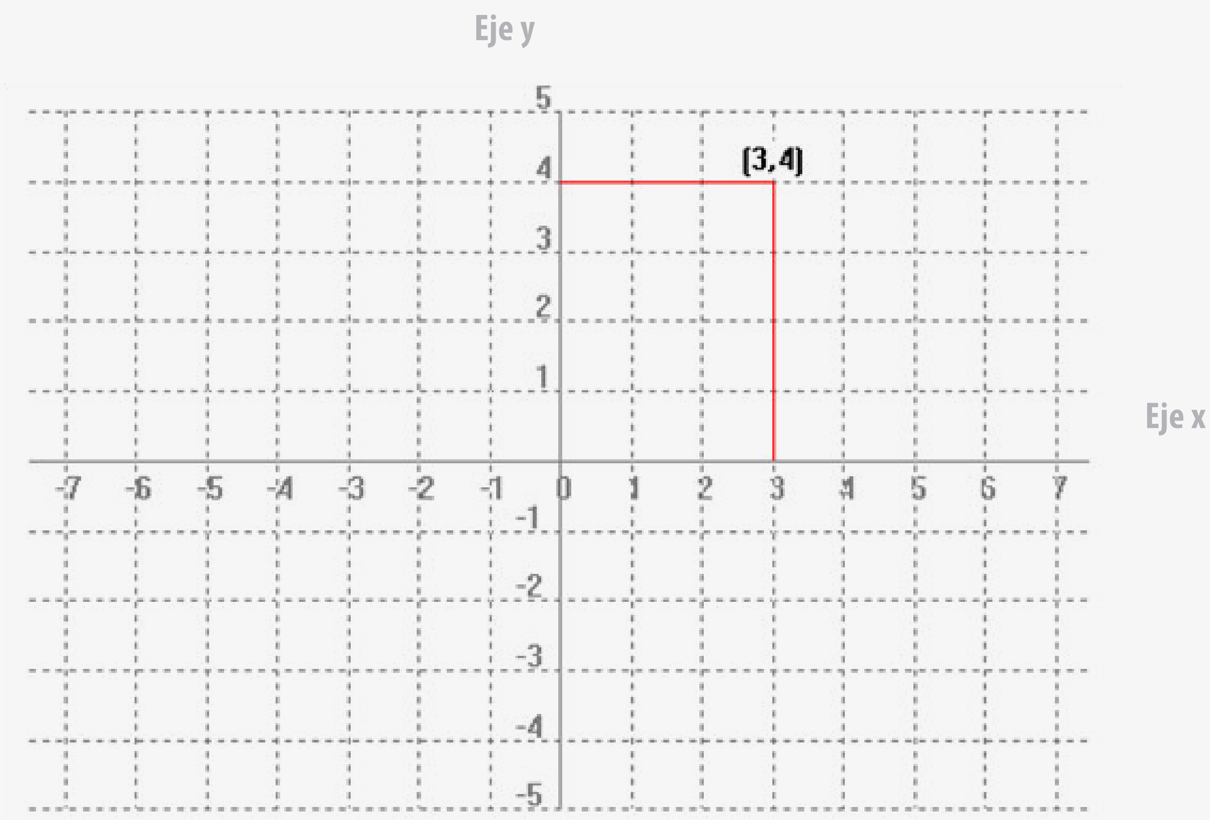
Los ejes sirven para representar puntos del plano.

Cada punto del plano tiene 2 coordenadas:

Coordenada "x" o abscisa. Coordenada "y" u ordenada.

Para hacer referencia a un punto se menciona primero la abscisa y luego la ordenada.

Por ejemplo:



PUNTO = PAR ORDENADO = (3,4)

COORDENADA X = ABSCISA =3

COORDENADA Y = ORDENADA =4

Ejercitación

1 Representar en el mismo par de ejes cartesianos los siguientes puntos:

a=(-1,5)   b=(5,-1)   c=(2,4)   d=(4,2)   e=(-5,0)   f=(0,-5)   g=(-3,-3)

2 Representar en un par de ejes cartesianos:

a) un punto “a” con abscisa negativa y ordenada positiva

b) un punto “b” con abscisa nula y ordenada negativa

c) un punto “c” con abscisa positiva y ordenada nula

d) un punto “d” con abscisa negativa y ordenada negativa

e) un punto “e” cuya abscisa sea igual a su ordenada

f) un punto cuya ordenada sea el doble de su abscisa

3 Dar las coordenadas de un punto que esté sobre el eje x.

Decir que condición deben cumplir las coordenadas de un punto para que éste se halle ubicado sobre el eje x.

4 Dar las coordenadas de un punto que esté sobre el eje y.

Decir que condición deben cumplir las coordenadas de un punto para que éste se halle ubicado sobre el eje y.

5 Representar en un par de ejes cartesianos los puntos a=(2,2) , b=(2,-1) y c=(3,-1).

Dar las coordenadas del punto “d” de modo que entre los cuatro puntos formen un rectángulo.

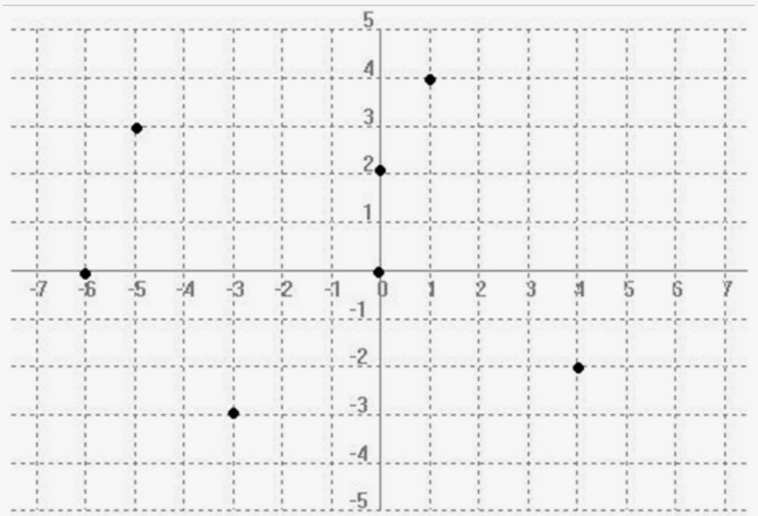
6 Representar en un par de ejes cartesianos los puntos a=(0,4) , b=(-2,2).

Dar las coordenadas de “c” de modo que entre los tres puntos formen un triángulo isósceles.

7 Representar en un par de ejes cartesianos los puntos a=(3,-1) , b=(6,-1).

Dar las coordenadas de “c” de modo que entre los tres puntos formen un triángulo rectángulo en a.

8 Escribir las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico.



Conjuntos y funciones entre ellos

Una colección de objetos, los cuales comparten una propiedad común, se denomina un **conjunto.** Así, todas las personas que ingresan en 2017 al IUPFA, definen claramente un conjunto, en notación matemática:
A={ x/ x es un alumno ingresante al IUPFA en 2017 }

El símbolo "/" debe leerse "con la propiedad que…" aunque la costumbre le impuso el significado "tal que".
Luego la expresión $x \in A$, que se lee "x pertenece a A" será verdadera según el valor de x, por ejemplo, el nombre de quien lee este trabajo reemplazado por x seguramente hará verdadera la proposición, mientras que reemplazarlo por el autor del mismo, la hará falsa.
Nos limitaremos aquí a conjuntos cuyos elementos son números reales, dicho de otra forma, nuestros conjuntos son **subconjuntos** de los reales; por ejemplo:
$\mathbb{R}(>0) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x>0 \}$; designa el conjunto de todos los números reales positivos.
Algunos subconjuntos del plano que se presentan con frecuencia tienen nombres especiales:
Llamaremos intervalo abierto de extremos a y b al conjunto:
$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b \}$
El intervalo cerrado con los mismos extremos es
$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b \}$
Los intervalos semiabiertos (o semicerrados) son:
$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b \}$
$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b \}$

Funciones entre subconjuntos de números reales

Es un concepto de importancia en todas las ramas de la matemática, aquel de función.
No es casual que los textos de física, química, economía, sociología, etc., abunden en el uso de funciones y sus representaciones gráficas.
Piense que una función es una regla, o una serie de instrucciones, que le permiten obtener un número real a partir de otro, por ejemplo la función:
$y = f(x) = 2x+4$, le dice a usted: "Tome un número real, multiplíquelo por dos y al resultado súmele cuatro"
Otro ejemplo:
$y = g(x)=\ln(x-2)$, le está indicando que para evaluar la función g, debe restar dos del numero al cual le está aplicando la función y al resultado calcularle el logaritmo natural.
Entonces, las instrucciones (o si lo prefiere la "receta") que definen una función están sujetas a solo dos condiciones: debe estar correctamente definida sobre el conjunto de números a los cuales se aplica y debe producir sólo un resultado.
Dada entonces una función f, denominaremos dominio de f y lo denotaremos Dom(f), al conjunto de todos los números reales a los cuales se puede aplicar el conjunto de instrucciones que definen esta función;
Por ejemplo: sea f la función:
$y = f(x)= 4x-2$

Está claro que su dominio comprende a todos los números reales, pues no hay ninguna restricción que impida multiplicar un número por cuatro y sumarle dos al resultado;

Podemos escribir entonces:

$Dom(f)=\mathbb{R}$

En cambio sea la función g:

$y = g(x)=\sqrt{x}$

La raíz cuadrada está definida en los números reales solo para aquellos positivos, entonces:

$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

Imagen de una función

El conjunto Imagen de una función es el conjunto formado por todos las números reales que provienen de algún x al serles aplicada la función. Denotamos este conjunto como: Im(f)

$Im(f)$: $\{ y \in \mathbb{R}$ / existe $x \in$ Dom (f) que verifica $f(x)=y \}$

Gráfico de una función

Si para una función dada, sobre un par de ejes cartesianos señalamos los puntos de la forma:

$(x,f(x))$, con $x \in$ Dom(f), obtenemos el grafico de dicha función, éste, de extrema importancia y utilidad, permite con un simple golpe de vista, sacar conclusiones a cerca de la función, su comportamiento y del fenómeno que representan.

Si bien hoy disponemos de programas que grafican funciones con precisión, como Matlab o Geogebra, es importante aprender a hacerlo "a mano".

Para ello, tomamos algunos valores en el dominio de la función, y buscamos sus imágenes, mientras más valores tomemos, más exacto será el grafico, escribimos los valores en una tabla y buscamos los puntos que ellos representan en un par de ejes cartesianos.

Ejercitación:

- Graficar cada una de las siguientes funciones y determinar dominio e imagen.

FUNCIÓN		IMAGEN
1) $f:\Re \rightarrow \Re$	$y = 2x - 3$	
2) $f:\Re \rightarrow \Re$	$y = x^2 - 4$	
3) $f:\Re \rightarrow \Re$	$y = 2^x$	
4) $f:\Re \rightarrow \Re$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
5) $f:\Re \neq 3 \rightarrow \Re$	$y = \frac{2}{x-3}$	
6) $f:\Re \rightarrow \Re$	$y = x^3$	

7) $f: \Re \geq 0 \rightarrow \Re$	$y = \sqrt{x}$	
8) $f: \Re \neq 0 \rightarrow \Re$	$y = \frac{1}{x} + 2$	
9) $f: \Re \geq 4 \rightarrow \Re$	$y = \sqrt{x - 4}$	
10) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = (x - 2)^3$	
11) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = (x - 3)^2$	
12) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = \frac{x}{3}$	
13) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = 3 - x^2$	
14) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = x^3 - 1$	
15) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = \frac{x - 1}{2}$	
16) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = \sqrt[3]{x^2}$	
17) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = \lvert x \rvert$	
18) $f: \Re \neq 0 \rightarrow \Re$	$y = \frac{1}{x^2}$	
19) $f: \Re \rightarrow \Re$	$y = \sqrt[3]{x}$	

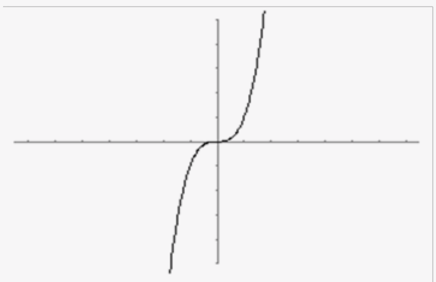
Clasificación de funciones

Inyectiva: Una función es inyectiva cuando **$x1 \neq x2$ => $f(x1) \neq f(x2)$**

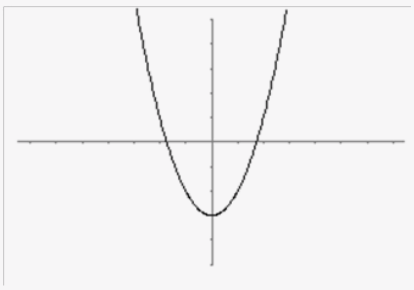
O sea, a valores distintos del dominio, corresponden valores distintos de la imagen.

Por lo tanto, en un gráfico, la función es inyectiva, cuando al trazar líneas horizontales, éstas cortan al gráfico en un único punto o no lo cortan.

Las siguientes funciones están definidas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:



FUNCIÓN INYECTIVA

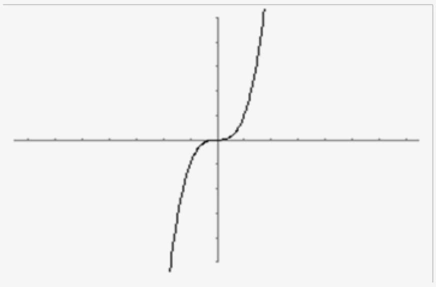


FUNCIÓN NO INYECTIVA

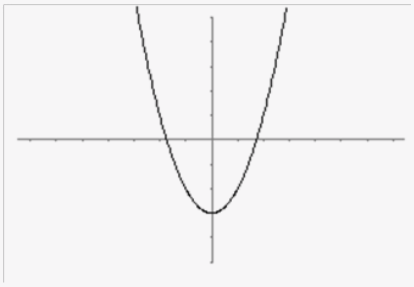
Clasificación de funciones

Sobreyectiva: Una función es sobreyectiva o suryectiva cuando $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Las siguientes funciones están definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



FUNCIÓN SOBREYECTIVA



FUNCIÓN NO SOBREYECTIVA

Una función simultáneamente inyectiva y sobreyectiva se denomina biyectiva, en este caso tenemos una relación uno a uno entre los reales.

Ejercitación

- Clasificar las siguientes funciones:

FUNCIÓN		CLASIFICACIÓN
1) $f: \Re \to \Re$	$y = 2x - 3$	
2) $f: \Re \to \Re$	$y = x^2 - 4$	
3) $f: \Re \to \Re$	$y = 2^x$	
4) $f: \Re \to \Re$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
5) $f: \Re \neq 3 \to \Re$	$y = \frac{2}{x-3}$	
6) $f: \Re \to \Re$	$y = x^3$	
7) $f: \Re \geq 0 \to \Re$	$y = \sqrt{x}$	
8) $f: \Re \neq 0 \to \Re$	$y = \frac{1}{x} + 2$	
9) $f: \Re \geq 4 \to \Re$	$y = \sqrt{x-4}$	
10) $f: \Re \to \Re$	$y = (x-2)^3$	
11) $f: \Re \to \Re$	$y = (x-3)^2$	

12) $f:\Re \to \Re$	$y = \dfrac{x}{3}$	
13) $f:\Re \to \Re$	$y = 3 - x^2$	
14) $f:\Re \to \Re$	$y = x^3 - 1$	
15) $f:\Re \to \Re$	$y = \dfrac{x-1}{2}$	
16) $f:\Re \to \Re$	$y = \sqrt[3]{x^2}$	
17) $f:\Re \to \Re$	$y = \lvert x \rvert$	
18) $f:\Re \neq 0 \to \Re$	$y = \dfrac{1}{x^2}$	
19) $f:\Re \to \Re$	$y = \sqrt[3]{x}$	
20) $f:\Re \neq 2 \to \Re$	$y = \dfrac{1}{x-2}$	

Función inversa a una función dada

Partiendo de una función como ejemplo: f(x)=2•x+3

Su tabla de valores es:

x	y
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
....	...

La función inversa tiene la tabla invertida:

x	y
-1	-2
1	-1
3	0
5	1
....	...

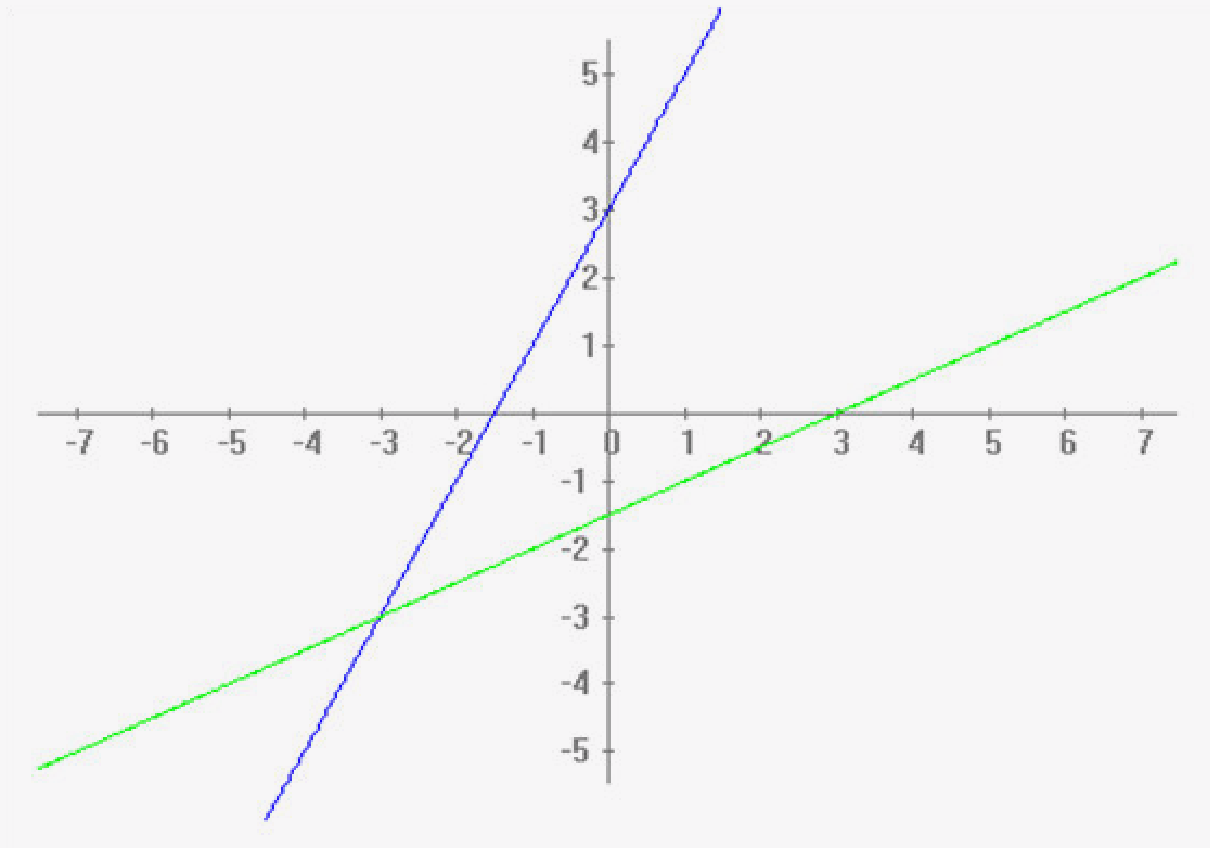
La fórmula de la función inversa puede obtenerse despejando la variable x:

$$y = 2.x+3 \Rightarrow \frac{y-3}{2} = x$$

Como lo habitual es que las funciones dependan de x, renombramos las variables, es decir cambiamos y por x:

$$y = \frac{x-3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

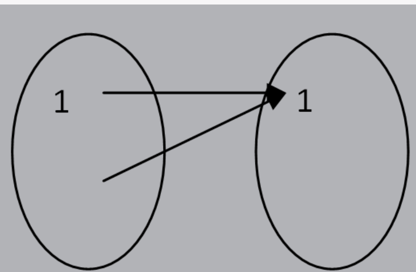
Podemos comprobar fácilmente que esta fórmula produce la segunda tabla y por lo tanto corresponde a la función inversa de la dada al principio.



Notar que ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz que biseca los cuadrantes primero y tercero.

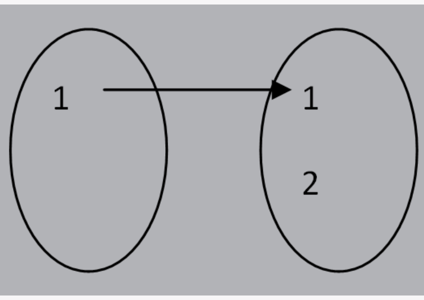
Cuando una función es biyectiva o "uno a uno" admite inversa. Veamos porqué:

Si la función no fuese inyectiva pasaría esto:



La relación inversa no podría ser función, puesto que a 1 le corresponderían dos imágenes.

Si la función no fuese sobreyectiva pasaría esto:



La relación inversa no podría ser función, puesto que a 2 no le correspondería ninguna imagen.

Ejercitación

- Hallar las inversas de las siguientes funciones (son las funciones biyectivas de la ejercitación anterior y algunas más):

FUNCIÓN		FUNCIÓN INVERSA
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = 2x - 3$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = x^3$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = (x-2)^3$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = \sqrt[3]{x}$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = \dfrac{x}{3}$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = x^3 - 1$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = \dfrac{x-1}{2}$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = x - 4$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = \dfrac{1}{2} \cdot x + 3$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = \dfrac{2}{3} \cdot x + 1$	
$f:\Re \rightarrow \Re$	$y = -x$	

Funciones lineales

Las funciones de la forma: $y = mx+b$, merecen una mención especial, se presentan con frecuencia y representan el caso que la variable dependiente "y" guarda una proporción constante con la variable independiente "x".

Al graficarlas, podemos observar que representan las rectas de la geometría elemental en el plano, por ende, necesitamos solo dos valores reales y sus imágenes para elaborar su gráfico.

Cuando evaluamos la ordenada correspondiente a $x = 0$ obtenemos $y = b$; esta es entonces la "ordenada al origen".

Por cada unidad que avanzamos en el eje de las x, la imagen asciende (o desciende) m unidades, este número es la "pendiente".

Por el contrario, dados dos puntos del plano:

$P = (x_1, y_1)$

$Q = (x_2, y_2)$

La recta que ellos determinan se puede calcular por:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ejercitación

1. Grafique las siguientes funciones y luego determine, la pendiente y la ordenada al origen de cada una;

$f_1(x) = 3x + 2$

$f_2(x) = 3x$

$f_3(x) = 2$

$f_4(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

$f_5(x) = x$

$f_6(x) = \frac{1}{3}x - 2$

$f_7(x) = -3x + 2$

$f_8(x) = -x$

2. En la siguiente gráfica determinar la ecuación de cada recta.